

УДК 534.1

Исследование колебаний механизма планетарного типа

В.С. Павельев

Студент, кафедра «Газотурбинные и нетрадиционные энергоустановки»

МГТУ им. Н. Э. Баумана, г. Москва, Россия

Научный руководитель: К.Б. Обносков, к.т.н, доцент кафедры «Теоретическая механика»

МГТУ им. Н. Э. Баумана, г. Москва, Россия

МГТУ им. Н. Э. Баумана

Swimmer8@mail.ru

Колебаниями называется процесс, сопровождающийся многократным чередованием возрастания и убывания некоторых физических величин.

В зависимости от природы колебательных процессов различают механические, электромагнитные, акустические колебания и т.д. В данной статье рассматриваются механические колебания.

Движение машин и механизмов всегда сопровождаются колебательными процессами, поэтому для понимания многих физических явлений необходимо изучить свойства колебаний.

Рассмотрим механизм планетарного типа, на который из активных сил действуют только силы тяжести (рис. 1).

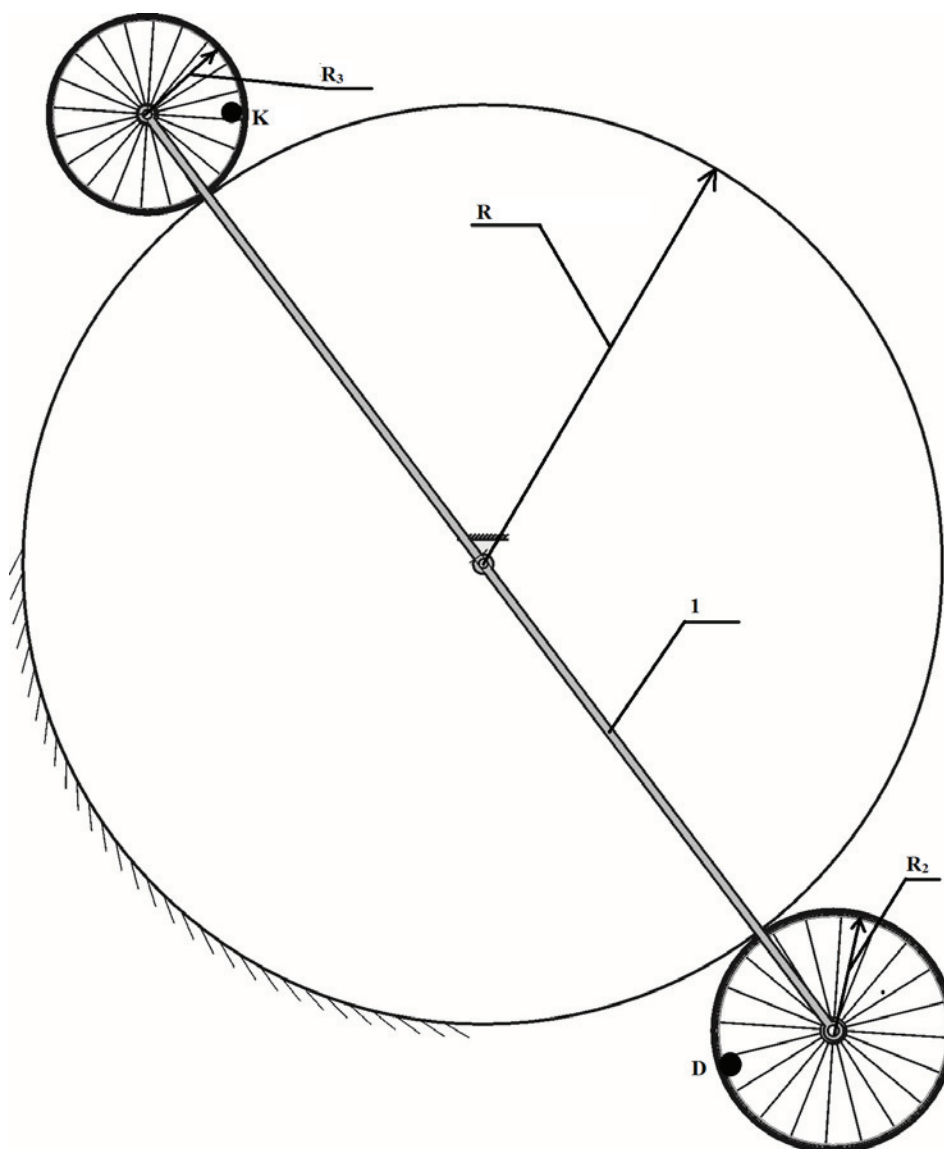


Рис. 1. Механизм планетарного типа

Система состоит из неподвижного цилиндра радиуса R , двух малых цилиндров радиусами R_2 , R_3 и массами M_2 и M_3 соответственно. В каждом цилиндре имеется свинцовая пробка, жестко связанная с дном цилиндра. Пробка массой M_4 (точка D) принадлежащая цилиндру радиуса R_2 , а массой M_5 (точка K) - цилиндру радиуса R_3 . Цилиндры приводит во вращение кривошип массой M_1 .

Для исследования положений устойчивого равновесия необходимо найти потенциальную энергию системы:

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4 + \Pi_5,$$

где Π_1 – потенциальная энергия кривошипа, Π_2 – потенциальная энергия цилиндра радиуса R_2 , Π_3 – потенциальная энергия цилиндра радиуса R_3 , Π_4 – потенциальная энергия свинцовой пробки D , Π_5 – потенциальная энергия свинцовой пробки K .

$$\Pi_1 = M_1 g \left(\frac{R_2 - R_3}{2} \right) (1 - \cos \varphi);$$

$$\Pi_2 = M_2 g (R + R_2) (1 - \cos \varphi);$$

$$\Pi_3 = -M_3 g (R + R_3) (1 - \cos \varphi);$$

$$\Pi_4 = M_4 g \left[(R + R_2) (1 - \cos \varphi) - R_2 \left(1 - \cos \left(\left(\frac{R + R_2}{R_2} \right) \varphi \right) \right) \right];$$

$$\Pi_5 = M_5 g \left[R_3 \left(1 - \cos \left(\left(\frac{R + R_3}{R_3} \right) \varphi \right) \right) - (R + R_3) (1 - \cos \varphi) \right];$$

После подстановки и упрощения Π получается равной

$$\begin{aligned} \Pi = g & \left(- \left(M_1 \left(\frac{R_2 - R_3}{2} \right) + (M_2 + M_4)(R + R_2) - (M_3 + M_5)(R + R_3) \right) \cos \varphi + \right. \\ & M_4 R_2 \cos \left(\left(\frac{R + R_2}{R_2} \right) \varphi \right) - M_5 R_3 \cos \left(\left(\frac{R + R_3}{R_3} \right) \varphi \right) + \frac{1}{2} M_1 (R_2 - R_3) + (M_2 + \\ & M_4)(R + R_2) - (M_3 + M_5)(R + R_3) - M_4 R_2 + M_5 R_3 \Big); \end{aligned} \quad (1)$$

Введем обозначения:

$$a_1 = \left(M_1 \frac{(R_2 - R_3)}{2} + (M_2 + M_4)(R + R_2) - (M_3 + M_5)(R + R_3) \right) g;$$

$$a_2 = M_4 R_2 g;$$

$$a_3 = M_5 R_3 g,$$

тогда потенциальная энергия может быть представлена в форме:

$$\begin{aligned} \Pi_1 = a_1 (1 - \cos \varphi) - a_2 \left(1 - \cos \left(\left(\frac{R + R_2}{R_2} \right) \varphi \right) \right) \\ + a_3 \left(1 - \cos \left(\left(\frac{R + R_3}{R_3} \right) \varphi \right) \right), \end{aligned}$$

если выразить $(1 - \cos \varphi)$, $\left(1 - \cos \left(\left(\frac{R + R_2}{R_2} \right) \varphi \right) \right)$, $\left(1 - \cos \left(\left(\frac{R + R_3}{R_3} \right) \varphi \right) \right)$ через

половинные углы и обозначить $n_2 = \frac{(R + R_2)}{2 * R_2}$, $n_3 = \frac{(R + R_3)}{2 * R_3}$, то получим:

$$\Pi_0 = 2 \left(a_1 \sin^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) - a_2 \sin^2(n_2 \varphi) + a_3 \sin^2(n_3 \varphi) \right), \quad (1')$$

Предположим, что радиусы цилиндров равны. Пусть $M_1 = 5$ кг, $M_2 = 15$ кг, $M_3 = 5$ кг, $M_4 = 4$ кг, $M_5 = 2$ кг, $R = 20$ м, $R_2 = 1$ м, $R_3 = 1$ м. Построим график Π (рис. 2):

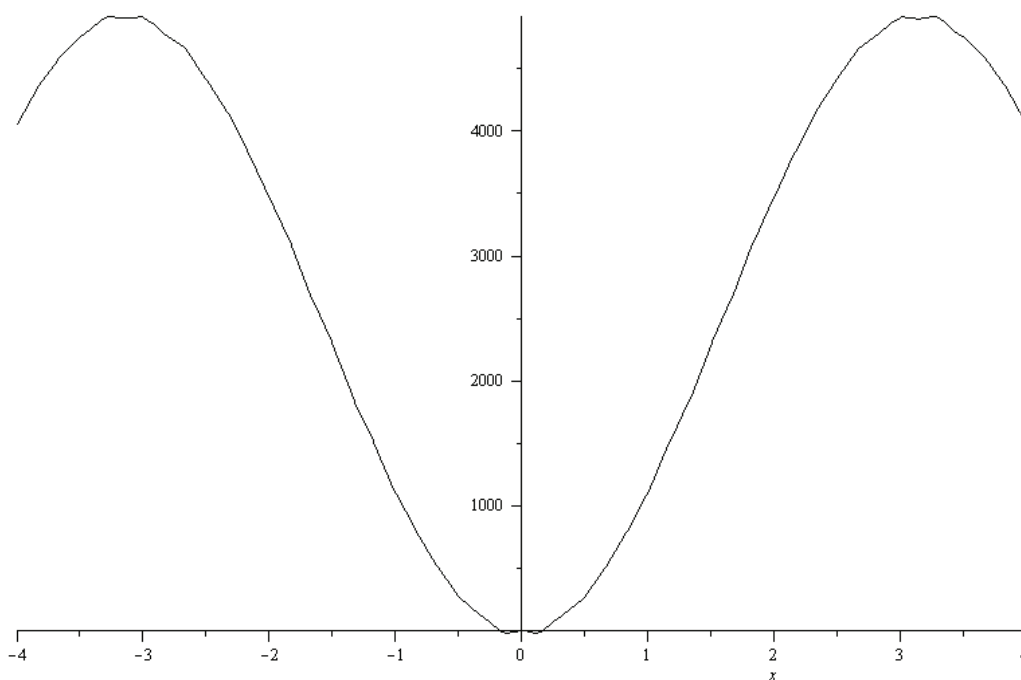


Рис. 2. График Π

Из рисунка видно, что положение устойчивого равновесия, т.е. минимум потенциальной энергии, находится не в 0, а немного смещен. Теперь увеличим массы свинцовых пробок D и K, при этом оставив остальные параметры системы неизменными: $M_4 = 70$ кг, $M_5 = 20$ кг. График потенциальной энергии выглядит так (рис. 3):

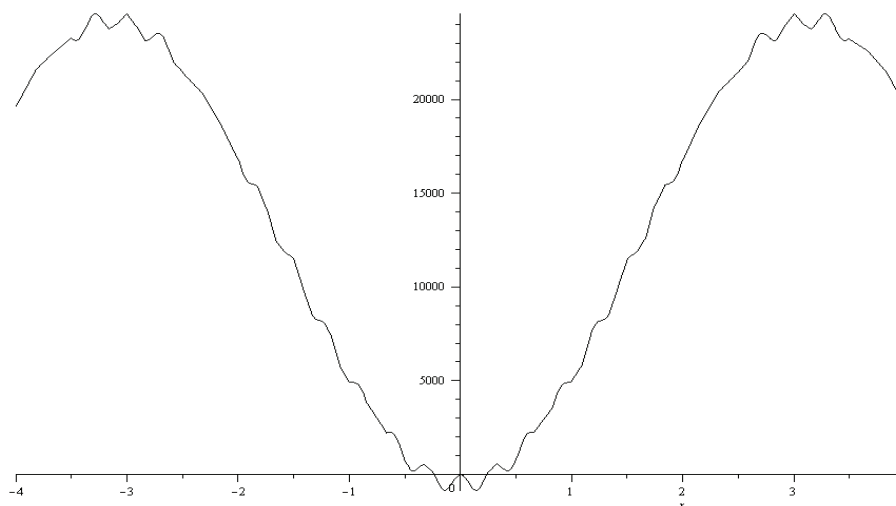


Рис. 3. График потенциальной энергии

Механическая система имеет несколько положений равновесия, т.е. минимумов потенциальной энергии. Следующая задача — определение координат положений устойчивых равновесий с помощью производной от потенциальной энергии.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \left(R_2 \left(\frac{M_1}{2} + M_2 + M_4 \right) + R_3 \left(-\frac{M_1}{2} - M_3 - M_5 \right) + R(M_2 - M_3 + M_4 - M_5 g \sin \varphi - M_4 g R + R_2 \sin R + R_2 R_2 \varphi + M_5 g R + R_3 \sin R + R_3 R_3 \varphi) \right); (2)$$

Построим график при известных значениях уравнения (2) (рис. 4):

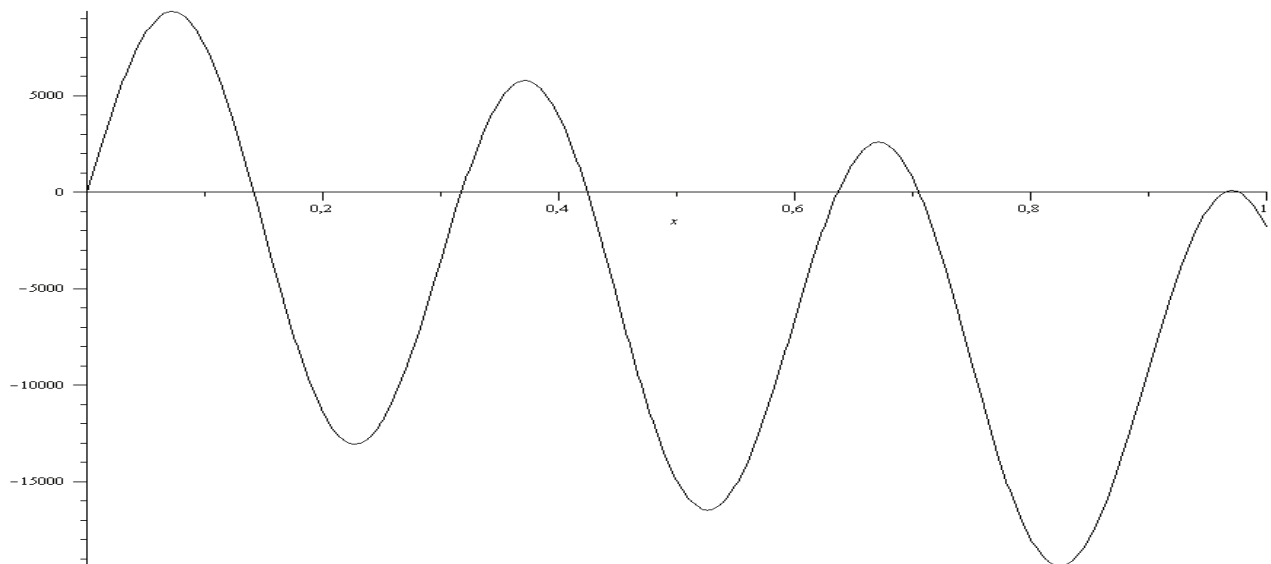


Рис. 4. График при известных значениях

Из графика видно, что при $\varphi = 0.141, 0.423, 0.705, 0.975$ рад механическая система будет находиться в состоянии равновесия.

Для расчета периода с помощью теории малых колебаний необходимо найти кинетическую энергию системы.

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5,$$

где T_1 – кинетическая энергия кривошипа, T_2 – кинетическая энергия цилиндра радиуса R_2 , T_3 – кинетическая энергия цилиндра радиуса R_3 , T_4 – кинетическая энергия свинцовой пробки D, T_5 – кинетическая энергия свинцовой пробки K, $L = 2R + R_2 + R_3$.

$$T_1 = \frac{1}{2} M_1 \left(\frac{L^2}{12} + \frac{(R_2 - R_3)^2}{4} \right) \dot{\varphi}^2;$$

$$T_2 = \frac{3}{4} M_2 \dot{\varphi}^2 (R + R_2)^2;$$

$$T_3 = \frac{3}{4} M_3 \dot{\varphi}^2 (R + R_3)^2;$$

$$T_4 = M_4(R + R_2)^2(1 - \cos\left(\frac{R}{R_2}\varphi\right))\dot{\varphi}^2;$$

$$T_5 = M_5(R + R_3)^2(1 - \cos\left(\frac{R}{R_3}\varphi\right))\dot{\varphi}^2;$$

Подставим в Т и упростим:

$$T = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\left(M_1\left(\frac{L^2}{12} + \frac{(R_2 - R_3)^2}{4}\right) + (R + R_2)^2\left(\frac{3}{2}M_2 + 2M_4\right) + (R + R_3)^2\left(\frac{3}{2}M_3 + 2M_5\right) - 2M_4(R + R_2)^2\cos\left(\frac{R}{R_2}\varphi\right) - 2M_5(R + R_3)^2\cos\left(\frac{R}{R_3}\varphi\right)\right); \quad (3)$$

Введем обозначение:

$$A = M_1\left(\frac{L^2}{12} + \frac{(R_2 - R_3)^2}{4}\right) + (R + R_2)^2\left(\frac{3}{2}M_2 + 2M_4\right) + (R + R_3)^2\left(\frac{3}{2}M_3 + 2M_5\right) - 2M_4(R + R_2)^2\cos\left(\frac{R}{R_2}\varphi\right) - 2M_5(R + R_3)^2\cos\left(\frac{R}{R_3}\varphi\right),$$

тогда

$$T = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 A \quad (3')$$

Дифференциальное уравнение свободных колебаний механической системы следующее:

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0, \quad (4)$$

где $\omega^2 = c/a$.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi}\left(\frac{M_1}{12}(L^2 + 3(R_2 - R_3)^2) + (R + R_2)^2\left(\frac{3}{2}M_2 + 2M_4\right) + (R + R_3)^2\left(\frac{3}{2}M_3 + 2M_5\right) - 2M_4(R + R_2)^2\cos\left(\frac{R}{R_2}\varphi\right) - 2M_5(R + R_3)^2\cos\left(\frac{R}{R_3}\varphi\right)\right);$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \ddot{\varphi}\left(\frac{M_1}{12}(L^2 + 3(R_2 - R_3)^2) + (R + R_2)^2\left(\frac{3}{2}M_2 + 2M_4\right) + (R + R_3)^2\left(\frac{3}{2}M_3 + 2M_5\right)\right) + \dot{\varphi}^2 2M_4(R + R_2)^2 \sin\left(\frac{R}{R_2}\varphi\right)\frac{R}{R_2} - \ddot{\varphi} 2M_4(R + R_2)^2 \cos\left(\frac{R}{R_2}\varphi\right) + \dot{\varphi}^2 2M_5(R + R_3)^2 \sin\left(\frac{R}{R_3}\varphi\right)\frac{R}{R_3} - \ddot{\varphi} 2M_5(R + R_3)^2 \cos\left(\frac{R}{R_3}\varphi\right);$$

Переходя к новым координатам $\varphi = q + \varphi_1$, где φ_1 нам уже известно, и подставляя эту замену в формулы (1) и (3), получим зависимость кинетической и потенциальной энергий от q.

Пусть $\varphi_1 = 0.141$ рад.

$$\Pi = 111970.566q^2 - 337.3q - 849.264.$$

Из-за малости коэффициента перед q этим значением можно пренебречь.

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial q} = -223941.132q,$$

$$T = 83802.6\dot{q}^2,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{d}{dt}(167605.2\dot{q}) = 167605.02\ddot{q}.$$

Подставляя полученные выражения в (4), получается:

$$167605.2\ddot{q} + 223941.132q = 0,$$

$$\omega = \sqrt{1.336} = 1.155 \frac{\text{рад}}{\text{с}},$$

следовательно,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 5.437 \text{ с}.$$

Для расчета периода колебаний методом фазовой плоскости рассмотрим пример попроще, когда $M_1 = 5$ кг, $M_2 = 15$ кг, $M_3 = 5$ кг, $M_4 = 40$ кг, $M_5 = 2$ кг, $R = 20$ м, $R_2 = 5$ м, $R_3 = 5$ м. График потенциальной энергии будет следующим (рис. 5):

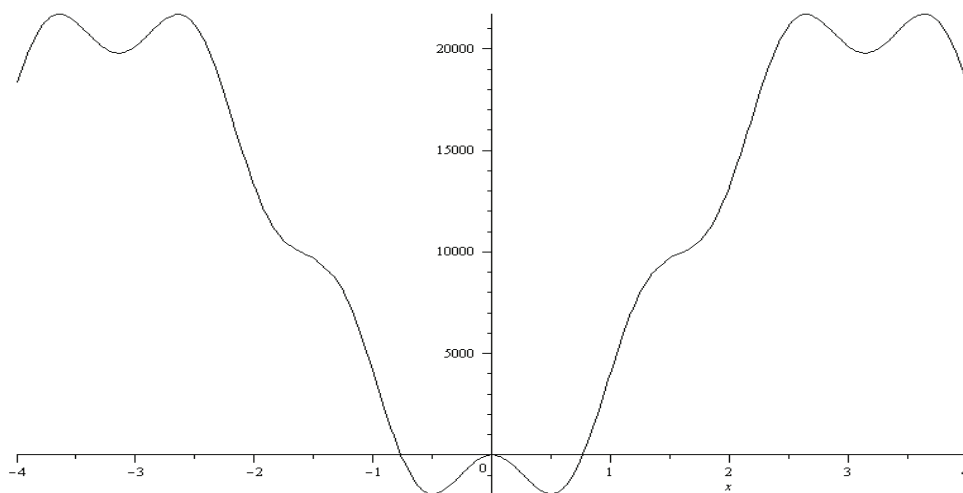


Рис. 5. График потенциальной энергии

График производной (рис. 6):

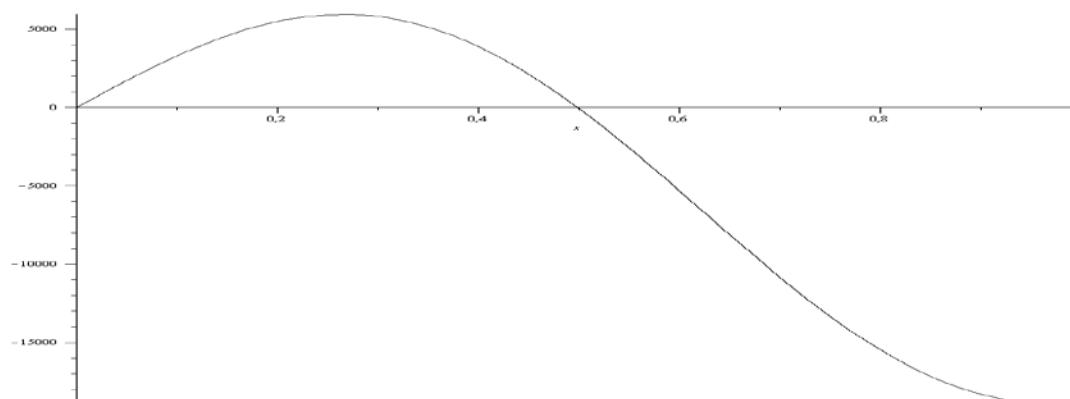


Рис. 6. График производной

Из графика видно, что $\varphi = 0,5$ радиан. По аналогии, как делалось раньше, переходим к новым координатам и подставляем замену в формулы (1) и (3). При этом

$$\Pi = 783.46 + 56797.2524q^2 + 14977.34q,$$

$$T = 79708.55\dot{q}^2,$$

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial q} = -113594.5q - 14977.34,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) = 159417.1\ddot{q}.$$

Подставляя полученные значения в формулу (4), получаем выражение

$$159417.1\ddot{q} + 113594.5q + 14977.34 = 0,$$

отсюда легко найти ω :

$$\omega = \sqrt{0.712} = 0.844 \frac{\text{рад}}{\text{с}},$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 7.44 \text{ с}.$$

Перейдем к методу фазовой плоскости. Уравнение нелинейной консервативной системы может быть приведено к виду

$$A(q)\ddot{q} + f(q) = 0. \quad (5)$$

Уравнение (5) интегрируется в квадратурах. В частности, оно имеет первый интеграл

$$A(q) \frac{\dot{q}^2}{2} + \int_0^q f(q) dq = h$$

— интеграл сохранения энергии, который мы, положив

$$\Pi(q) = \int_0^q f(q) dq,$$

будем писать следующим образом:

$$A(q) \frac{\dot{q}^2}{2} + \Pi(q) = h.$$

Постоянная h определяется начальным отклонением и начальной скоростью, т.е. начальным запасом полной энергии.

$$\dot{q} = \sqrt{2 \left(\frac{h - \Pi(q)}{A(q)} \right)},$$

$$\sqrt{\frac{A(q)}{2(h - \Pi(q))}} dq = dt,$$

Период колебаний около положения устойчивого равновесия $\varphi = q$ согласно методу фазовой плоскости, с учётом того, что для рассматриваемого механизма выполняется закон сохранения полной механической энергии, находится с помощью формулы :

$$\int_{q_1}^{q_2} \sqrt{\frac{A}{2(h - \Pi)}} dq = \frac{1}{2} T^*, \quad (6)$$

где T^* - период колебания механической системы.

Значения q_1 и q_2 находятся из фазового портрета (на рисунке q_1 и q_2 обозначены α и β соответственно) (рис. 7):

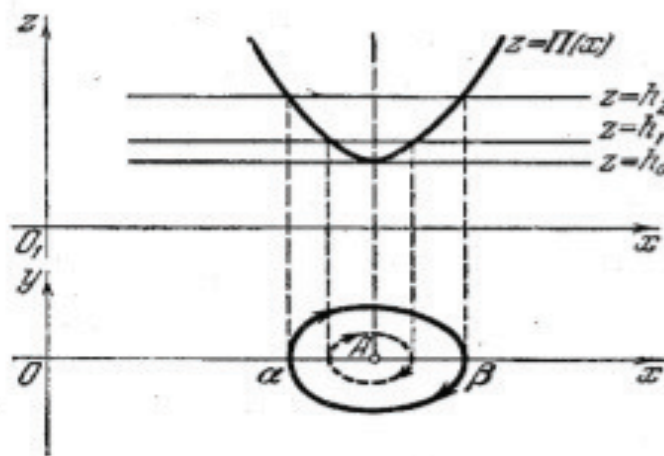


Рис. 7. Фазовый портрет

Увеличим наш участок, чтобы точно определить значение h (рис. 8).

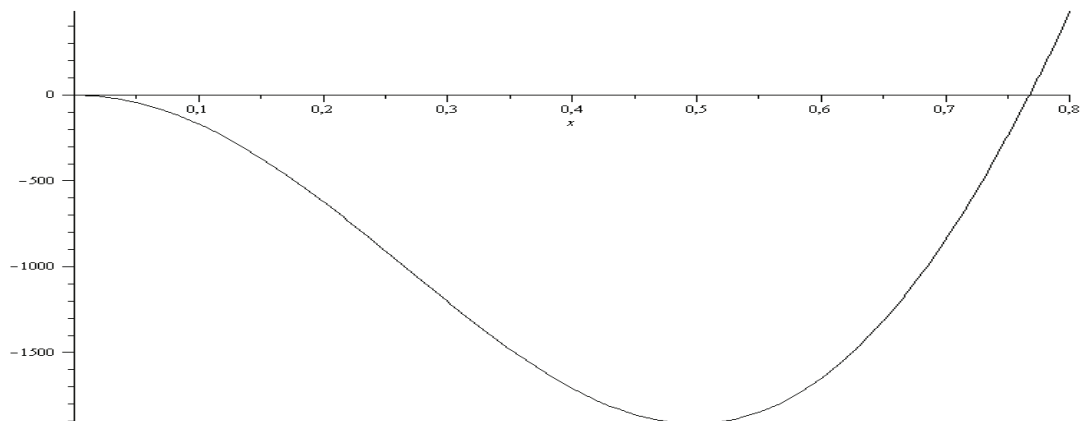


Рис. 8. Определение h

Возьмем $h = -1002.13$ Дж. q_1 и q_2 при таком h равны 0.265 и 0.682 соответственно.

Π определяется из уравнения (1'). Подставляя числовые значения, получим, что

$$\Pi_0 = 23568 \sin\left(\frac{1}{2}\varphi\right)^2 - 3731.6 \sin\left(\frac{5}{2}\varphi\right)^2.$$

Полученные значения подставляются в формулу (6), и вычисляется интеграл:

$$\int_{0.265}^{0.682} \sqrt{\frac{\frac{216875}{3} - 52500 \cos(4\varphi)}{2(-1002.13 - 23568 \sin(\frac{1}{2}\varphi)^2 + 3731.6 \sin(\frac{5}{2}\varphi)^2)}} = \frac{1}{2} T^*$$

$$T^* = 2 * 4.28 = 8.56 \text{ с.}$$

Из этого ответа видно, что вычисление периода методом фазовой плоскости дает более точный ответ. Но если теория малых колебаний позволяет найти период только в одном положении равновесия, то метод фазовой плоскости позволяет вычислить период, даже если система имеет несколько положений равновесия.

Используя те же самые данные, найдем период колебаний механической системы, когда она имеет два положения равновесия (симметрично относительно оси ординат).

Из теории малых колебаний можно сделать вывод, что период равен $T = 14.88 \text{ с}$ (благодаря симметрии).

Решая эту задачу с помощью метода фазовой плоскости, найдем h , q_1 и q_2 (рис. 9):

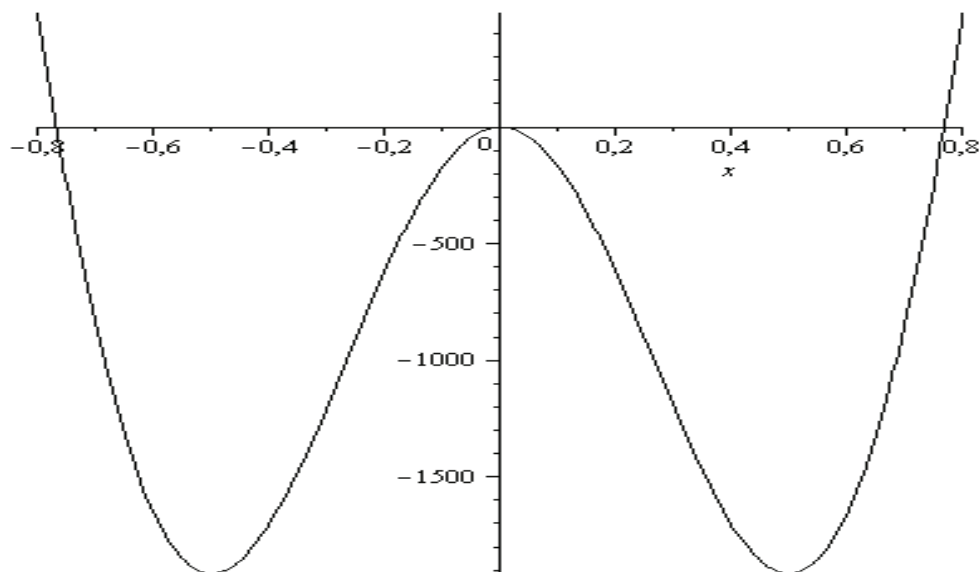


Рис. 9. Фазовая плоскость

$h = 60.53 \text{ Дж}$, $q_1 = -0.77$, $q_2 = 0.77$. $A(q)$ и Π остались неизменными.

Вычислим интеграл:

$$\int_{-0.77}^{0.77} \sqrt{\frac{\frac{216875}{3} - 52500 \cos(4\varphi)}{2(60.53 - 23568 \sin(\frac{1}{2}\varphi)^2 + 3731.6 \sin(\frac{5}{2}\varphi)^2)}} = \frac{1}{2} T^*,$$

$$T^* = 2 * 10.344 = 20.688 \text{ с},$$

Как видно из ответа, решение у нас получилось более точным. Методом малых колебаний мы не сможем рассчитать период колебаний, если у нас будет несколько положений равновесия, как, например, на рисунке 3.

Сравним значение получившегося периода в области с двумя состояниями устойчивого равновесия с периодом в области с одним положением равновесия. Видно, метод фазовой плоскости дал нам точный ответ, чего нельзя сказать о методе малых колебаний, в нем погрешность значительно выше.

Из проделанной работы можно сделать вывод, что для исследования малых колебаний с одной степенью свободы механической системы с одним положением устойчивого равновесия выгодно использовать дифференциальное уравнение свободных колебаний. Метод фазовой плоскости, в свою очередь, применим не только к малым колебаниям. С помощью этого метода легко описывать колебания механической системы, имеющей несколько положений устойчивого равновесия.

Список литературы

1. Курс теоретической механики / К. С. Колесников [и др.] М.: МГТУ имени Н. Э. Баумана, 2005. 559 с.
2. Бабаков И. М. Теория колебаний. М.: Наука, 1968. 449 с.