электронное научно-техническое издание
НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ
Эл № ФС 77 - 30569. Государственная регистрация №0421100025. ISSN 1994-0408

Анализ сигма-дельта модулятора

77-30569/307193
01, январь 2012

Шахтарин Б. И., Быков А. А., Ковальчук А. А.

УДК 621.396.662

МГТУ им. Н.Э. Баумана
shakhtarin@mail.ru
nastia_kov-k@rambler.ru

Введение

Принципы сигма-дельта модуляции известны еще с 80 годов прошлого века, однако наибольший интерес эта модуляция стала представлять в настоящее время. Одним из наиболее распространенных практических приложений сигма-дельта модуляции являются устройства АЦП [1, 2, 4]. Устройства цифровой дискретизации сигналов, построенные по принципу сигма-дельта модуляции, выгодно отличаются от других аналогичных устройств в связи с простотой технической реализации и лучшими шумовыми характеристиками. Тем не менее, практическое использование сигма-дельта модуляторов не ограничивается только устройствами АЦП. Известны и достаточно часто применяются модуляторы в синтезаторах частот для формирования дробного коэффициента деления частоты сигнала[3, 5]. Одним из преимуществ использования сигма-дельта модулятора является способность формировать шумовую полосу на высоких частотах. Посредством передискретизации с последующей децимацией выходного сигнала достаточно эффективно квантуется входной сигнал, при этом шумовая полоса достаточно просто удаляется посредствам фильтрации.

В современной литературе достаточно подробно рассматриваются принципы работы сигма-дельта модуляции [6], однако не рассматриваются математические модели модуляторов во временной области. Основой структуры рассматриваемых в данной статье модуляторов являются устройства с интеграторами без обратной положительной связи. Данные устройства являются физически реализованными [1, 2], но ранее они не были описаны с точки зрения математического моделирования. В разделах 1 и 2 приводится математическое описание работы модуляторов, как первого порядка, так и n - го порядка. Полученные модели описывают работу физически реализованных устройств. В разделе 3 представлена наиболее распространенная схема применения принципа работы сигма-дельта модулятора в синтезаторе частот.

1. Сигма-дельта модулятор 1-го порядка

Рассмотрим структурную схему сигма-дельта модулятора приведенную на рисунке 1. Модулятор состоит из интегратора, дискретизатора, и включенного в обратной связи цифро-аналогового преобразователя.

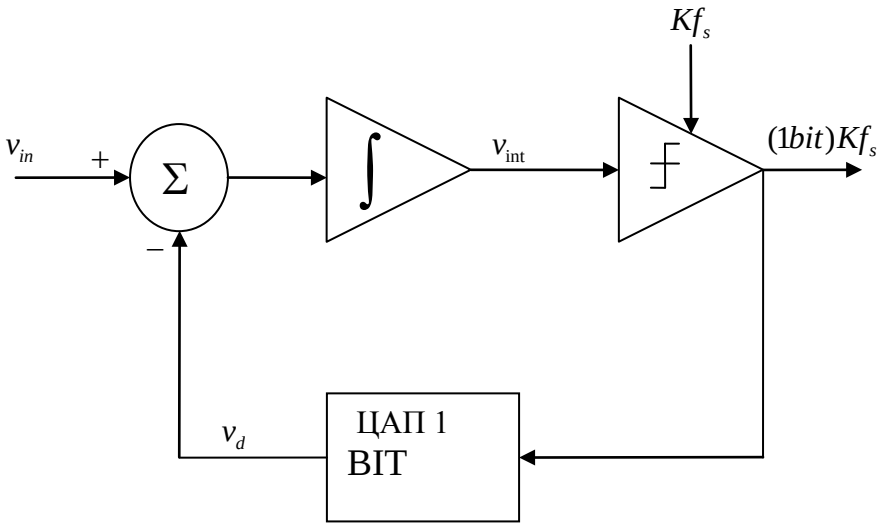

Рис. 1. Структурная схема сигма-дельта модулятора

В данной схеме дискретизатор представлен в виде тактируемого компаратора, который производит измерение не только по уровню компарирования, но и в момент прихода положительного импульса с тактируемого генератора. Как правило, частота импульсов тактирования в *K* раз превышает частоту измеряемого сигнала. Таким образом, *K* является показателем передискретизации входного сигнала.

Как видно из рисунка 2, уровень дискретизации составляет {-1,1}. Наиболее полно работу данного компаратора описывает функции гиперболического тангенса.

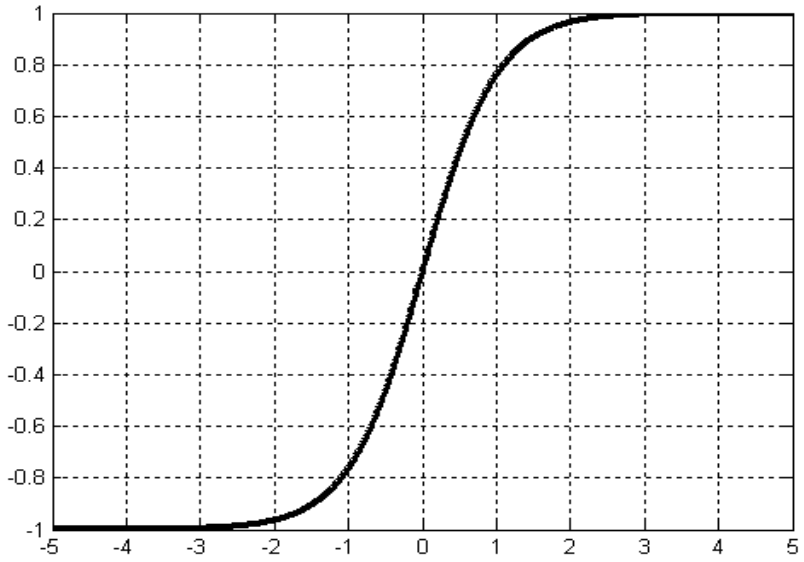

Рис. 2. Характеристика дискретизатора

Рассмотрим математическую модель сигма-дельта модулятора представленного на рисунке 3.

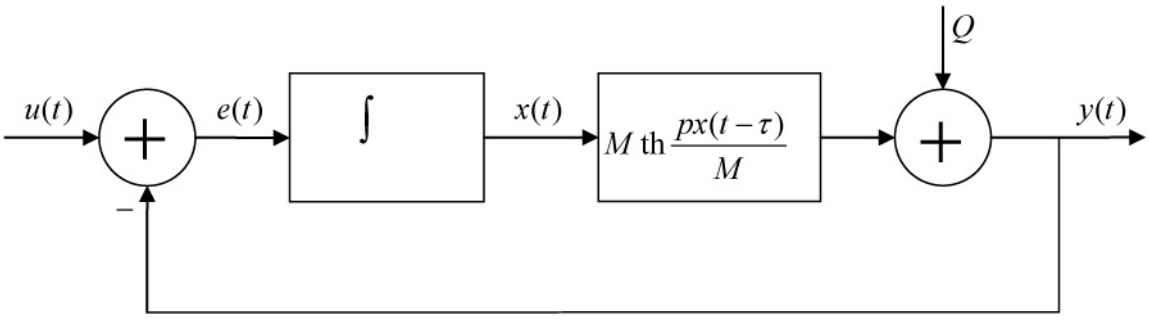

Рис. 3. Математическая модель сигма-дельта модулятора

$u(t)$ – входной сигнал; $e(t)$ – ошибка квантования; $x(t)$ – сигнал с интегратора; Q - шум квантования; $y(t)$ – выходной сигнал.

Представленная на рисунке 3 структура сигма-дельта модулятора получила наибольшее распространение как схема, позволяющая описать работу сигма-дельта модулятора. С учетом сделанных ранее предположений получим математическое описание работы сигма-дельта модулятора первого порядка. Для этого рассмотрим выходной сигнал с устройства квантования в виде

$$y(t) = Mth\frac{px(t-\tau)}{M}, \tag{1.1}$$

где M – уровень квантования; p- угол наклона характеристики дискретизатора (рис. 2); τ- учет задержки на обратной связи. Предположим, что входной сигнал интегратора имеет вид

$$e(t) = \frac{dx(t)}{dt}, \tag{1.2}$$

ошибка квантования равна

$$e(t) = u(t) - y(t). \tag{1.3}$$

Учитывая (1.1) и (1.2), получим

$$\frac{dx(t)}{dt} = u(t) - Mth\frac{px(t-\tau)}{M}. \tag{1.4}$$

Решением данного дифференциального уравнения, является сигналом с интегратора. Предполагая, что $u(t)$ является гармоническим сигналом, получим решение уравнения (1.4) посредствам численного метода.

На рисунках 4 и 5 представлены графики работы сигма-дельта модулятора при гармоническом входном воздействии $u(t)$. Наиболее полное представление о работе сигма-дельта модулятора дает спектральный анализ выходного сигнала.

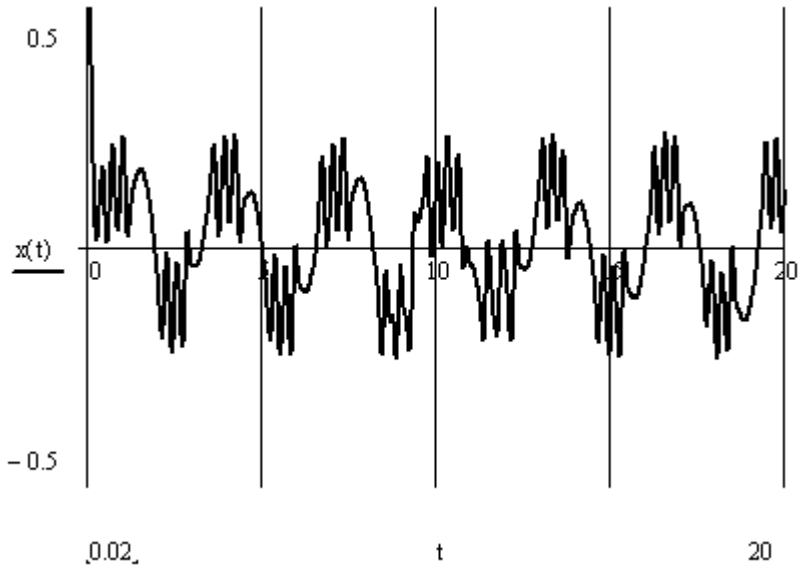

Рис. 4. График работы сигма-дельта модулятора $x(t)$

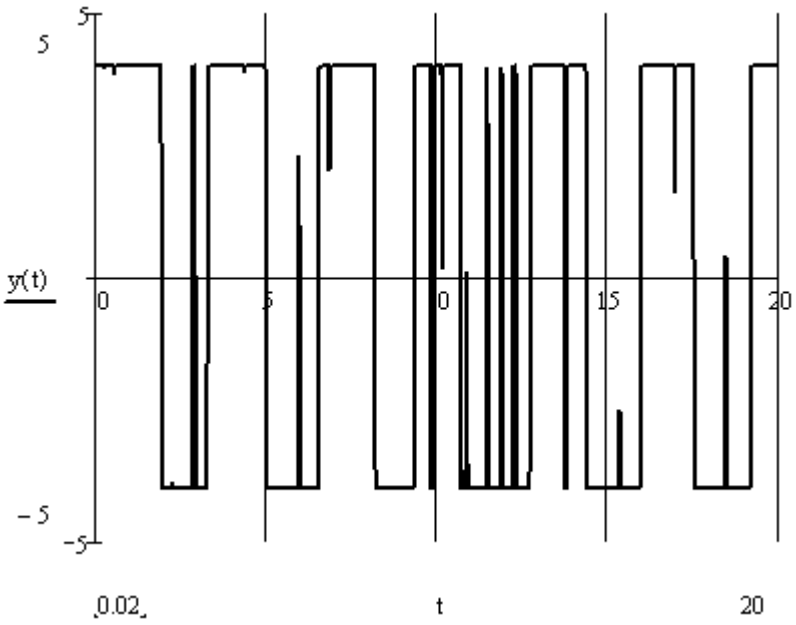

Рис. 5. График работы сигма-дельта модулятора $y(t)$

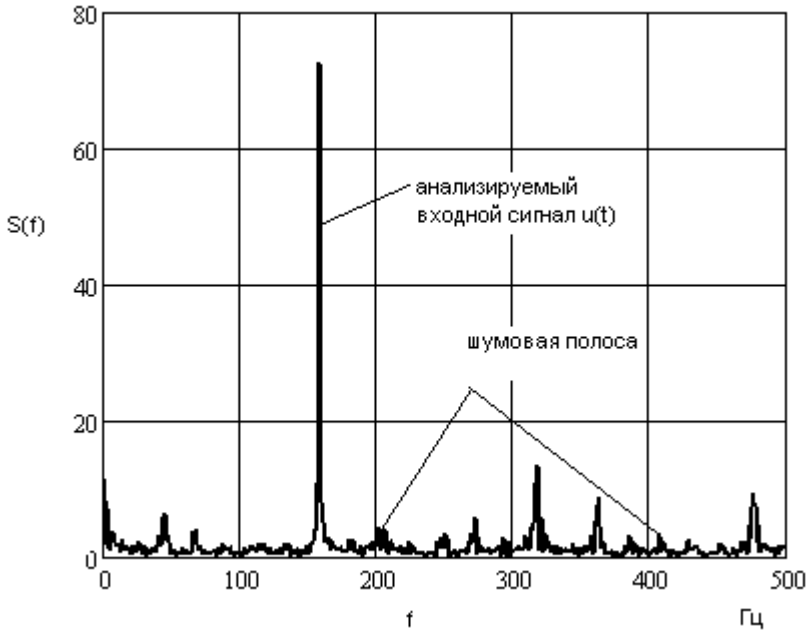

Рис. 6. Спектр выходного сигнала сигма-дельта модулятора первого порядка

Как видно на рисунке 6 помимо ярко выраженного всплеска анализируемого входного гармонического сигнала $u(t)$, видна шумовая составляющая. В литературе принято рассматривать данную шумовую составляющую, как результат ошибки квантования в квантователе. Детально процесс формирования шумовой составляющей в выходном сигнале сигма-дельта модуляторе рассмотрен в литературе [1, 2, 6, 7, 8], где основной причиной указывается вносимый шум ошибки квантователя. Однако, для анализа были взяты математические выражение (1.1-1.4) не учитывающие аддитивный шум. Таким образом, можно утверждать, что представленный метод анализа работы сигма-дельта модулятора с учетом аддитивного шума не дает полной картины работы сигма-дельта модулятора.

Рассмотрим фазовый портрет сигма-дельта модулятора первого порядка (рис. 7).

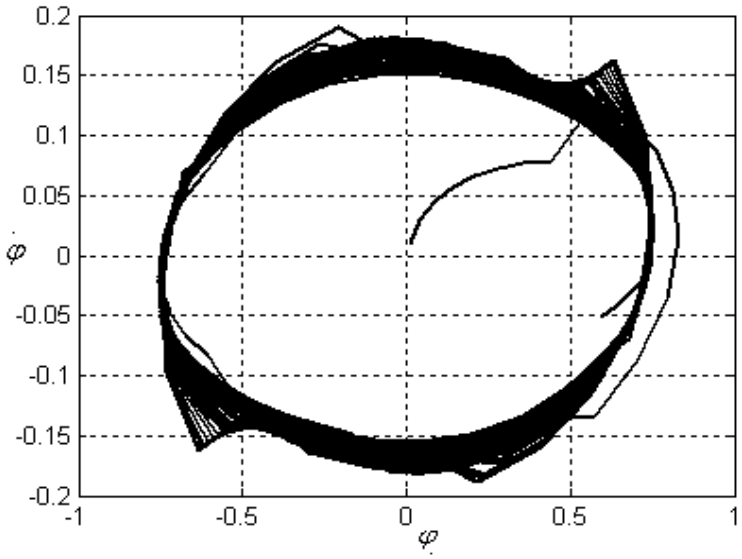

Рис. 7. Фазовый портрет сигма-дельта модулятора первого порядка

Как видно на рисунке 7, циклы непрерывно разворачиваются по фазовому цилиндру. С учетом полученных результатов при анализе хаотических аттракторов в [9] можно утверждать, что представленный тип аттрактора является хаотическим.

Рассмотрим влияние постоянного входного воздействия на сигма-дельта модулятор. Получим спектр выходного сигнала. На рисунке 8 представлен спектр выходного сигнала сигма-дельта модулятора при постоянно входном воздействии. Очевидно, что при постоянном входном воздействии на выходе сигма-дельта модулятора возникает дробность частот. Данное свойство получило широкое распространение в современном мире при построении синтезаторов частот, использующих в своей структуре ФАП.

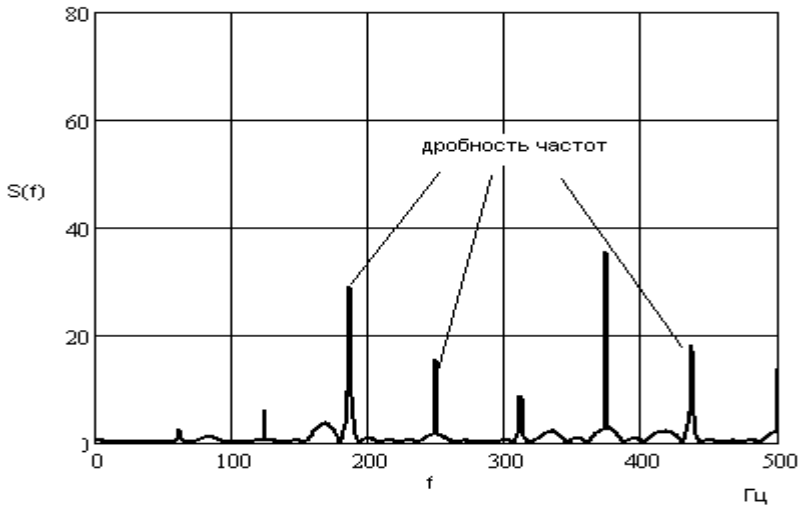

Рис. 8. Спектр выходного сигнала сигма-дельта модулятора при постоянно входном воздействии

2. Сигма дельта-модулятор *n* - го порядка

Анализ работы сигма-дельта модулятора *n* - го порядка проведем на примере модулятора второго порядка. На рисунке 9 представлена структурная схема сигма-дельта модулятора второго порядка.

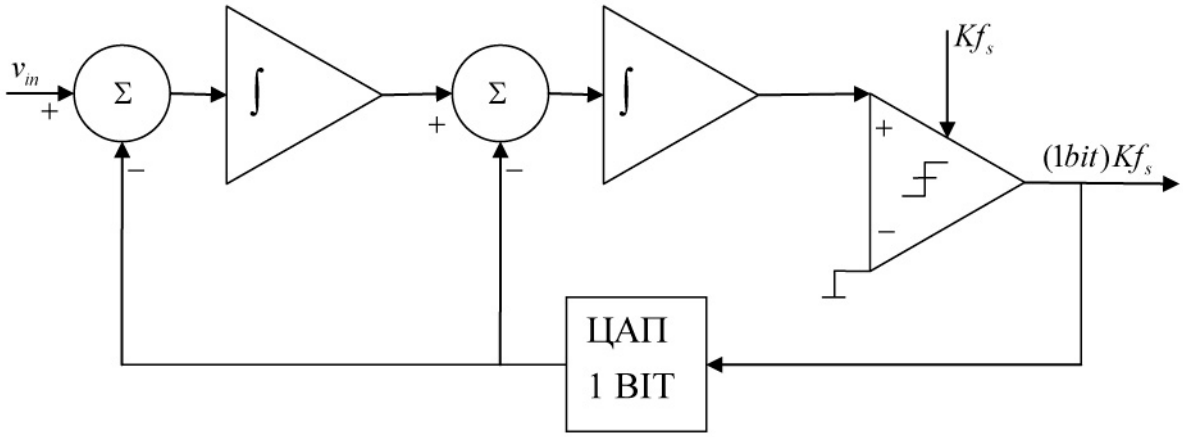

Рис. 9. Структурная схема сигма-дельта модулятора второго порядка

Как видно, в отличие от рисунка 1 порядок модулятора определяется числом интеграторов, включенных в структуру модулятора.

Рассмотрим математическую модель, описывающую работу модулятора второго порядка.

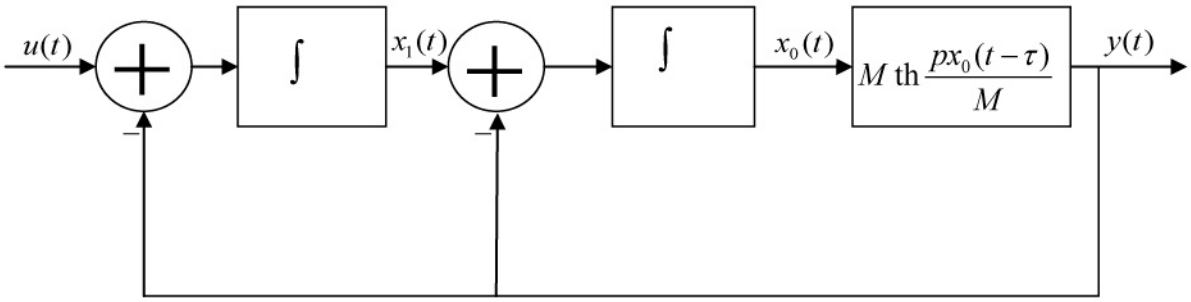

Рис. 10. Математическая модель работы модулятора второго порядка

В математической модели, представленной на рисунке 10, в отличие от модели, представленной на рисунке 3, не учитывается аддитивный шум квантования.

Рассмотрим выражения описывающие работу приведенной схемы, с учетом (1.2) и (1.3) получим

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = u(t) - Mth\frac{px_0(t-\tau)}{M}, \qquad (1.5)$$

где $x_1(t)$- напряжение после первого интегратора,

$$\frac{dx_0(t)}{dt} = x_1(t) - Mth\frac{px_0(t-\tau)}{M}, \quad (1.6)$$

где $x_0(t)$ – напряжение после второго интегратора

Тогда для модели n - го порядка получим выражение вида

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = u(t) - Mth\frac{px_0(t-\tau)}{M}, \quad (1.7)$$

$$\frac{dx_0(t)}{dt} = x_n(t) - Mth\frac{px_0(t-\tau)}{M}. \quad (1.8)$$

Решение системы уравнений (1.5), (1.6) описывает работу системы второго порядка, а решение системы уравнений (1.7), (1.8) - работу системы *n* - го порядка.

Решение системы приведенных уравнений в данном разделе рассматривать не будем, рассмотрим, как было выше указано, спектральную характеристику выходного сигнала модулятора второго порядка.

Как видно на рисунке 11 шумовая полоса в сигма-дельта модуляторе второго порядка принимает равномерно распределение, в отличие от рисунка 6. Также, уровень шума заметно увеличивается, а всплеск анализируемого сигнала имеет заметно выраженный характер.

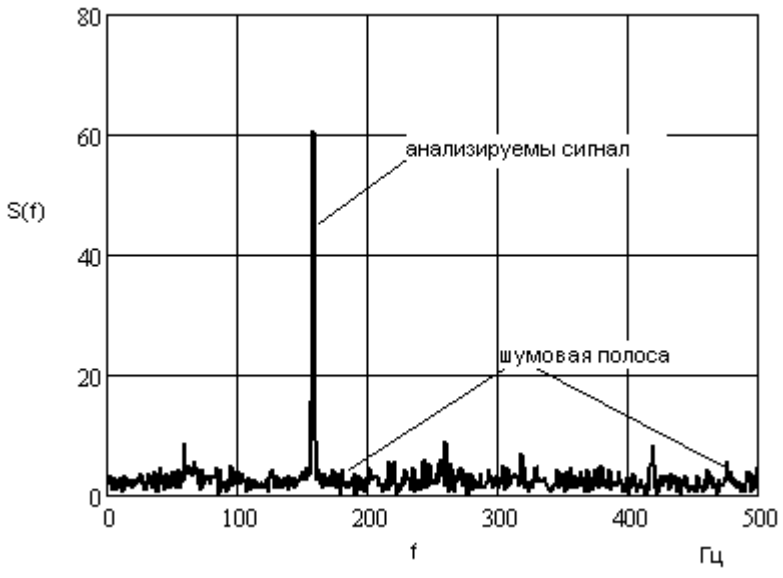

Рис. 11. Спектр выходного сигнала сигма-дельта модулятора второго порядка при гармоническом входном воздействии

3. Прикладные области применения сигма-дельта модуляторов

Наиболее актуальным применением сигма-дельта модуляторов является применение в синтезаторах частот с дробным коэффициентом деления. В литературе [4] рассматривается достаточно большое число методик использования модуляторов в синтезаторах частот. Рассмотрим одно из них.

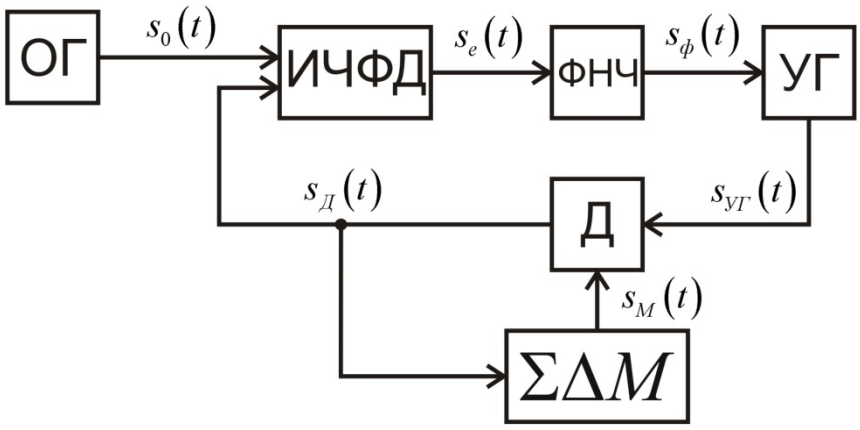

Рис. 12. Структурная схема синтезатора частот с дробным коэффициентом деления частоты

На рисунке 12 представлена структурная схема синтезатора частот с дробным коэффициентом деления частоты. ОГ - опорный генератор, ИЧФД - импульсно частотный фазовый детектор, ФНЧ - фильтр низкой частоты, УГ - управляемый генератор, Д - делитель частоты.

Сигнал с выхода делителя $s_д(t)$ является тактовым для сигма-дельта модулятора, который в свою очередь управляет коэффициентом деления N делителя. Сигнал с опорного генератора $s_0(t)$ сравнивается с сигналом $s_д(t)$ в блоке ИЧФД, в результате чего формируется сигнал ошибки$s_e(t)$. С помощью фильтра сигнал ошибки усредняется и затем $s_ф(t)$ используется для управления циклической частотой управляемого генератора.

Заключение

В данной статье рассмотрен сигма-дельта модулятор с обратной отрицательной связью. Получено математическое описание работы сигма-дельта модулятора во временной области. Также получены в графическом виде спектры выходных сигналов при различных входных воздействиях. Установлено, что возникновение шумовой полосы в

сигма-дельта модуляторе обусловлено тем, что модулятор представляет собой хаотический аттрактор. Рассмотрены математические модели без учета аддитивного шума, сделан вывод о влиянии порядка модулятора на уровень шумовой полосы в сторону увеличения. Также указана способность сигма-дельта модуляторов формировать дробность частот в выходном спектре. Приводятся графики основных характеристик работы сигма-дельта модуляторов при различных входных воздействиях.

Литература

1. Sigma-Delta (S-D) A/D Converters //New Product Application – 1999, winter edition-Analog Devices, 1998 pp 3-113-3-143
2. Application Note AN-283: Sigma – Delta ADCs and DACs // Application Reference Manual – Analog Devices, 1993, pp 20-3-20-18
3. Швец В., Нищирет Ю.// Архитектура сигма-дельта АЦП и ЦАП// Chip News 1998.№2. С. 211
4. Шахтарин Б.И. и др//Синтезаторы частот// -М.: Горячая линия –Телеком, 2007.-128с.
5. Gary Ushaw//Sigma Delta Modulation of Chaotic Signal// The University of Edinburgh 1998.
6. C.C. Cutler, «Transmission system employing quantization», US Patent N 2927962, March 8, 1960
7. H. Inose, Y. Yasuda, J. Murakami «A telemetring system by code modulation – Σ-Δ modulation» - IRE Trans. On Comm. Syst., pp 373-380, Dec 1962.
8. S.R Norsworthy, R. Schreider, G.C. Temes. Delta –Sigma Data Converters: Theory, Design and Simulation. – NY: IEEE Press, 1997.
9. Чернобаев В.Г. « Генераторы хаотических колебаний на основе систем фазовой синхронизации» - диссертация МЭИ (ТУ), 2001.

electronic scientific and technical periodical
SCIENCE and EDUCATION
EL № FS 77 - 30569. №0421100025. ISSN 1994-0408

Analysis of sigma-delta modulator

77-30569/307193

 # 01, January 2012

Shahtarin B.I, Bykov A.A., Kovalchuk A.A.

Bauman Moscow State Technical University
shakhtarin@mail.ru
nastia_kov-k@rambler.ru

A sigma-delta modulator with negative feedback was considered in this article. The structure and working principles of devices built on the basis of sigma-delta modulation were presented. Application areas of the sigma-delta modulators were explored. Mathematical models of the sigma-delta modulator's operation in the time domain were described. Analysis of operation of the sigma-delta modulator of the first and the second orders was also presented in the article. It was determined that a noise band appeared in the sigma-delta modulator because modulator was a chaotic attractor. Sigma-delta modulator's ability to form the frequency fractionality in output spectrum was also indicated. Mathematical models without additive noise were considered; the conclusion on the influence of the modulator's order on the noise level. The graphics, which displayed basic characteristics of sigma-delta modulator's operation with different inputs were included.

Publications with keywords: spectral analysis, phase portrait, sigma-delta modulator, frequency synthesizer, sampler, noise bandwidth, quantization error
Publications with words: spectral analysis, phase portrait, sigma-delta modulator, frequency synthesizer, sampler, noise bandwidth, quantization error

---

Reference

1. Sigma-Delta (S-D) A/D Converters, New Product Application – 1999, winter edition - Analog Devices 3 (1998) 113-143.

2. Application Note AN-283: Sigma – Delta ADCs and DACs, Application Reference Manual – Analog Devices 20 (1993) 3-18.

3. Shvets V., Nishchiret Iu., The architecture of sigma-delta ADC and DAC, Chip News 2 (1998) 211.

4. Shakhtarin B.I., et al., Frequency synthesizers, Moscow, Goriachaia liniia –Telekom, 2007, 28 p.

5. Gary Ushaw, Sigma Delta Modulation of Chaotic Signal, The University of Edinburgh, 1998.

6. C.C. Cutler, US Patent N 2927962, Transmission system employing quantization, 08.03.1960.

7. H. Inose, Y. Yasuda, J. Murakami, A telemetring system by code modulation – Σ-Δ modulation, IRE Trans. On Comm. Syst. December (1962) 373-380.

8. S.R Norsworthy, R. Schreider, G.C. Temes, Delta –Sigma Data Converters: Theory, Design and Simulation, NY, IEEE Press, 1997.

9. Chernobaev V.G., Generators of chaotic oscillations based on systems of phase synchronization (Dissertation), MEI (TU), 2001.